Aflevering 10

Fourieranalyse (2)

De Man van 401372 Hits

© Rutger Teunissen
www.muziekexact.nl

Een kouwelijke prefect in het Frankrijk van Napoleon zorgde voor een van de grootste doorbraken die ooit in de wiskunde, natuurkunde en de techniek heeft plaats gevonden. Een doorbraak die in de muziek sinds de komst van de computer heel nieuwe klank-arsenalen begint te ontsluiten.

Als je de naam "Herman Brood" invoert in een Internet zoekmachine, zoals Altavista, dan krijg je even later de melding: "Word count: 1004". Doe je hetzelfde met de naam "Zappa", dan wordt die maar liefst 180.473 maal geteld. Zo geeft Internet je snel een idee van de wereldwijde bekendheid of belangrijkheid van een bepaalde naam of een bepaald begrip. Als je nog nooit van Fourier of van de Fourieranalyse hebt gehoord, dan zal het je misschien verbazen dat Altavista het woord "Fourier" niet minder dan 401.372 keer turft!

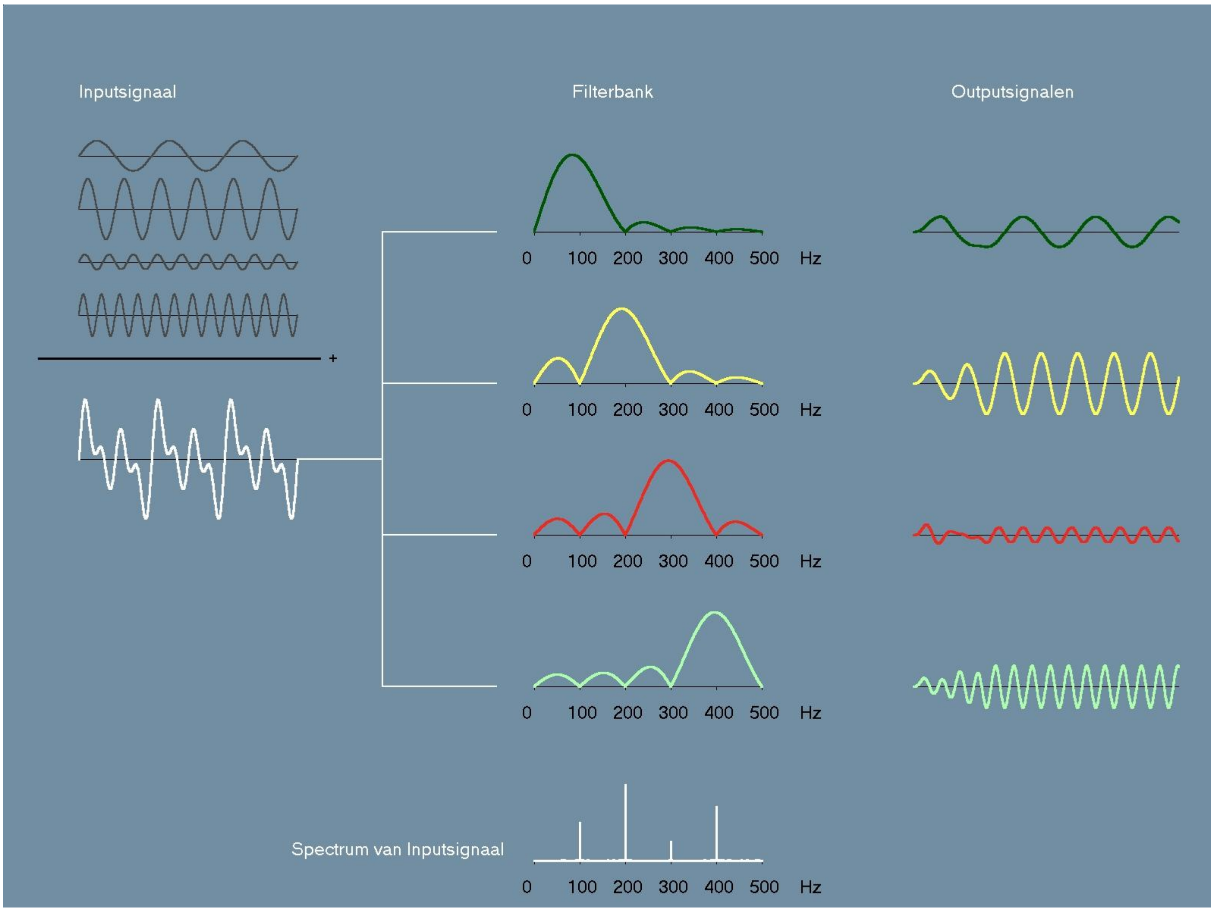
De reden waarom Jean Baptiste Joseph Fourier zo in de belangstelling staat, is niet het feit dat hij een uitstekend redenaar bleek tijdens de franse revolutie, of wiskundeprofessor was, of dat hij door Napoleon werd aangesteld tot prefect van het Departement van Grenoble, maar, uiteindelijk, dat de man zo'n ongelooflijke, ja waanzinnige kou-kleum was! Misschien heeft Fourier tijdens Napoleon's expeditie naar Egypte, waar hij als wetenschappelijk adviseur aan deelnam, een enge virusziekte had opgelopen, waardoor je de hele dag loopt te klappertanden. Het gerucht deed de ronde dat de Monsieur le Préfet soms zelfs in hartje zomer met een dikke jas bij de roodgloeiende potkachel zat. Fourier was niet alleen voortdurend bezig met de vraag hoe hij het warm kon krijgen, maar raakte meer en meer geobsedeerd door het vreemde verschijnsel dat warmte zich door iets kan voortbewegen alsof er hete deeltjes of beestjes doorheen kruipen! En als echte wiskundeman begon hij van lieverlee allerlei sommen te maken over dat kruipgedrag. Na meer dan 15 jaar rekenen schreef hij een boek over warmtegeleiding dat niet alleen wiskundig gezien een enorme doordraak was, maar ook de natuurkunde van de 19de eeuw misschien wel even veel vooruit bracht als het werk van Einstein een eeuw later. Bodemonderzoek, MRI-scan, röntgen, radar, sonar, optiek, sterrenkunde, radio en tv, GSM, spraakherkenning, digitale muziekapparatuur en muzieksoftware, al de technieken die daarbij gebruikt worden zijn ondenkbaar zonder de rekenmethode die Fourier ontwikkelde om een antwoord te krijgen op de simpele vraag: hoe plant warmte zich voort door een dunne staaf ijzer, of glas, of ander materiaal? De methode die hij vond om daar een antwoord op te geven bleek eindeloos veel belangrijker en universeler dan de vraag zelf!

Universeel? Wat heeft warmtegeleiding dan in 's hemelsnaam met muziek te maken? In Afl. 7, *Het Geheim van de Zijdegrotten*, zagen we al dat temperatuurschommeling en luchtdrukschommeling (= geluid) alletwee signalen zijn. Maar daarnaast is er nog een veel directer verband met muziek. De warmtegeleiding door een ijzeren staaf kun je meten door er op verschillende plaatsen thermometers aan te bevestigen en dan te kijken naar de schommelingen die op de thermometers worden aangegeven als je ergens onder de staaf even een brandende kaars houdt. De schommeling die elke thermometer aangeeft is een (tijd)signaal. Nu zou het heel goed kunnen zijn dat menig gitarist bij zo'n experiment met een staaf, een kaars en een stel thermometers onwillekeurig moet denken aan een snaar, een plectrum en een stel gitaar-elementen. En het zou ook heel goed kunnen zijn dat, even afgezien natuurlijk van die elektrische elementen, Fourier hetzelfde heeft gedaan, want er was in zijn tijd al veel bekend over het trillingsgedrag van een snaar. In elk geval kwam er met de theorie van Fourier ook direkt een oplossing voor het eeuwenoude raadsel van de boventonen die duidelijk hoorbaar zijn als je een snaar aanslaat (zie kader: *Een Oneindige Rij Buiken*).

De Filterbank Analyzer

In de vorige aflevering hebben we gezien hoe je door de combinatie van een Lopend Gemiddelde filter en Amplitude Modulatie een bandfilter kunt samenstellen dat perfekt geschikt is voor het analyseren van harmonische klanken, zoals de stem en snaar- en blaasinstrumenten. De kern van de Fourieranalyse bestaat uit een bank van zulke bandfilters. Hoe dat zit illustreren we nu aan de hand van een voorbeeld.

We maken een proeftoon die een mix is van vier sinuscomponenten van resp. 100, 200, 300 en 400 Hz. De componenten krijgen verschillende sterkten. In Figuur 4, links boven in grijs, zijn deze vier sinussen afgebeeld. De mix ervan is het witte signaal daaronder; dat is dus



een harmonische toon, waarvan de grondtoon 100 Hz is. Het spectrum ervan is onder in de figuur te zien (eigenlijk ten overvloede, want de sterkten van de 4 sinussen kun je ook direkt uit de grijze signalen aflezen). Deze mix gebruiken we als input voor de filterbank. Het is de bedoeling dat de filterbank uit de mix de vier afzonderlijke componenten *perfect* weet te scheiden en elk in hun eigen volume weergeeft.

We construeren een filterbank die bestaat uit vier bandfilters waarvan elk precies één van de vier sinuscomponenten van het inputsignaal doorlaat en de andere drie tegenhoudt. We doen dat volgens het recept dat in de vorige aflevering werd beschreven.

Ten eerste moeten we zorgen voor een Lopend Gemiddelde filter dat om de 100 Hz een nul-dip heeft, want de harmonischen van de proeftoon liggen 100 Hz uit elkaar (zie kader: *Filteren is vermenigvuldigen*). Uit Figuur 3 van Afl. 9 kun je afleiden dat het aantal nul-dips afhangt van het aantal samples waarover je het gemiddelde neemt. Als je uitgaat van een samplefrequentie van 44100 Hz, en je middelt uit over 441 samples, liggen de nul-dips op onderlinge afstanden van 100 Hz.

Eveneens hebben we al gezien dat je van alle nul-dips die het Lopend Gemiddelde filter heeft, er precies één buiten gevecht kunt stellen, op elke gewenste plaats. Dat doe je door middel van Amplitude Modulatie. Neem bijvoorbeeld het tweede bandfilter (geel) in Figuur 4: het heeft nul-dips bij alle veelvouden van 100 Hz, *behalve bij 200 Hz*. Dat komt omdat de Gain-getallen van het gele filter gevuld zijn met samples van een sinusgolf van 200 Hz. Zo ontstaat een bandfilter dat alleen de tweede harmonische van het inputsignaal, die van 200 Hz, zal doorlaten. De andere harmonischen vallen precies samen met de nul-dips en worden dus *volledig* tegengehouden!!

Rechts in Figuur 4 zijn de outputsignalen van de filterbank te zien. Het blijkt dat de filters eerst enige tijd nodig hebben om op gang te komen. Die tijd wordt de *transiënt* genoemd. De transiënt is een eigenschap van *elk* filter, of het nu digitaal of analoog of mechanisch is. De transiënt duurt in dit geval precies 0,01 sek, zoals je zelf kunt uitpluizen (lukt dat niet, stuur een mailtje!). Na de transiënt blijken alle outputsignalen inderdaad pure sinussen te zijn, met sterkten die exakt overeenkomen met de verschillende componenten van het inputsignaal.

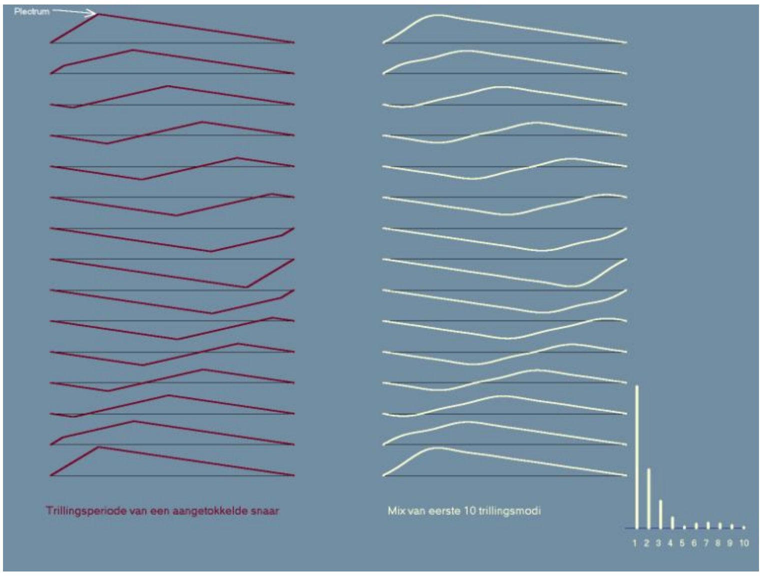
Kortom: de filterbank werkt perfect en weet de proeftoon precies uiteen te rafelen tot zijn afzonderlijke frequentiecomponenten en daarmee hebben we het meest wezenlijke deel van de Fourieranalyse onder de knie. Halleluja. Toch hebben we een heleboel zaken gemakshalve maar even onder het tapijt geveegd. Het resultaat van onze bandfilter-analyse bestaat uit *klinkende tonen*, net zoals de toonbollen van Helmholtz (Afl.6). Maar daar zijn we eigenlijk helemaal niet in geïnteresseerd! Het is te doen om de analyse van het spectrum en we willen dus alleen maar weten *hoe sterk* de sinussen zijn die uit de bandfilters komen. Vier getalletjes hoeven we maar te kennen, waarmee we de lengten van de vier spectraallijnen onderaan Figuur 4 kunnen tekenen. Verder was de proeftoon die we maakten wel heel simpel: brave, harmonische sinussen, waarvan de fases allemaal gelijk zijn aan nul (Afl. 7). De Fourieranalyse kon, zagen we al eerder, ook de fase berekenen. Het ziet er niet naar uit dat we dit klaarspelen met onze huidige filterbank. Verder hebben we die bandfilters zo precies kunnen construeren omdat we de toonhoogte van de proeftoon kenden. Meestal weet je de toonhoogte niet en bovendien kun je niet voor elk geluidje weer eventjes een perfect getuned filterbankje aanmaken! En dan natuurlijk nog de vraag: wat is nou precies die Fast Fourier Transform (FFT) waar je zo vaak over hoort? Wat is daar zo "*Fast"* aan?

Je merkt 't al: het laatste woord over de Fourieranalyse is in deze DSP-serie nog niet gezegd!

Kader 1

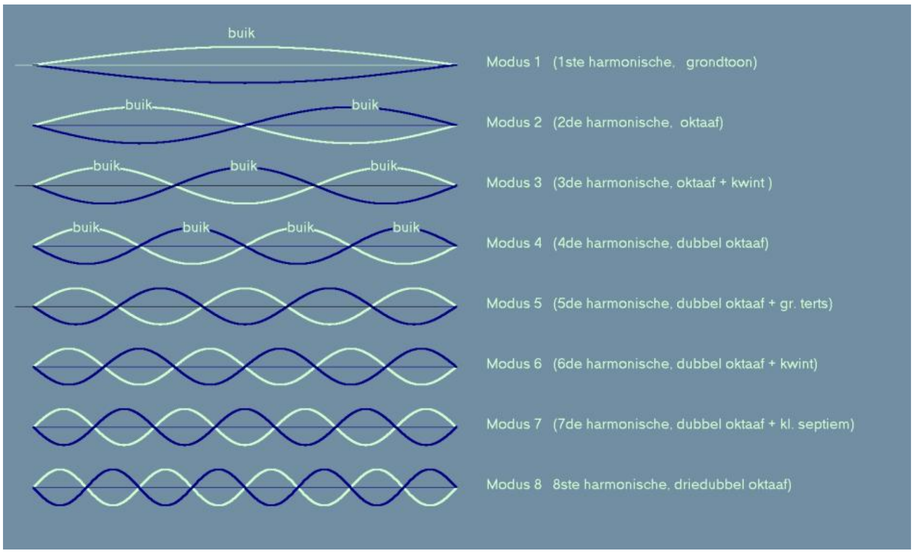
Een Oneindige Rij Buiken

In Figuur 1 links, bovenste plaatje, is de vorm van een gitaarsnaar te zien precies op het moment dat het plectrum het contact met de snaar verliest (in de figuur is de snaaruitwijking sterk overdreven). De plaatjes daaronder zijn "filmbeelden" die laten zien hoe de golfbeweging zich door de snaar voortplant totdat, in het onderste plaatje, de beginstand weer is bereikt. In deze computeranimatie is duidelijk te zien hoe het "tokkelpunt" zich door de snaar voortbeweegt in twee richtingen: naar links en naar rechts. Dat een aangetokkelde snaar zich zo gedraagt wisten ze al in het begin van de 18de eeuw, maar niemand kon uitleggen waarom deze beweging de zo typerende snaarklank veroorzaakt, namelijk een toon met duidelijk waarneembare boventonen, die altijd een vaste reeks vormen en die ervoor zorgen dat een snaar zo muzikaal, "harmonisch" klinkt. Dit raadsel kon pas worden opgelost door het werk van Fourier.



De Fouriertheorie maakt duidelijk dat een snaar eigenlijk alleen maar in "sinusvormige" patronen kan trillen. Die patronen worden *trillingsmodi* of kortweg *modi* genoemd en gedragen zich volgens een simpele regel die je met behulp van wat huis- tuin en keukenspullen zelf kunt vaststellen.

Neem een stuk touw van een paar meter lengte ('n heel lange "snaar"), knoop het ene uiteinde vast aan de muur en het andere aan een decoupeerzaag met regelbaar toerental. Zorg dat de spanning op het touw niet te hoog is en stel de zaag in op het laagst mogelijke toerental. Als je nu heel geleidelijk het toerental verhoogt zul je zien dat het touw op een gegeven moment in een sinusvormige trillingsbeweging komt die is afgebeeld in Figuur 2 bovenaan. In het midden is de uitwijking van het touw het grootst. Deze manier van trillen wordt *Modus 1* genoemd, waarbij de grondtoon van de



snaar wordt geproduceerd. Verhoog je het toerental, dan zal het touwtje eerst heftig protesteren en chaotisch op en neer springen en dan plotseling in het midden stil komen te liggen, terwijl er nu op twee plaatsen een zg. "buik" ontstaat (zie Figuur 2). Dit is *Modus 2*. Het blijkt dat het toerental (de frequentie) twee keer zo hoog is als bij Modus 1, dus in Modus 2 klinkt een snaar een octaaf hoger. Zo kun je doorgaan en het touwtje ook laten trillen in Modus 3, Modus 4 etc. Steeds zie je dat het aantal buiken gelijk is aan het nummer van de modus. En steeds blijkt het toerental van de zaag een veelvoud te zijn van dat waarbij Modus 1 ontstaat, dus bijvoorbeeld Modus 7 vraagt om een toerental dat 7 maal zo hoog is als dat van Modus 1. Een getallenreeks waarvan elk element een veelvoud van het eerste element is, wordt een *harmonische* reeks genoemd. De frequenties die door de verschillende modi worden geproduceerd vormen dus zo'n reeks en worden daarom *harmonischen* genoemd.

Maar hoe zit dat nu bij die aangetokkelde snaar? Die heeft toch een heel andere golfvorm dan een van de modi? Wel, uit het simpele feit dat je bij het aanslaan van een snaar een heleboel boventonen kunt *horen*, mag je afleiden dat de snaar een trillingspatroon kan maken dat een *mix* is van een heleboel modi, sommigen sterk, anderen zwak. Die modi bepalen *samen* de tokkelvorm van de snaar. En dat is precies wat Fourier aantoont. Bovendien vond hij de methode om uit de *vorm* van de snaar de sterkten van al die modi afzonderlijk te berekenen! (De vorm van de snaar kun je opvatten als een signaal!) Als je een snaar aantokkelt ontstaan er weliswaar oneindig veel modi, harmonischen, maar ze worden heel snel zwakker naarmate hun rangnummer hoger is; in hoeverre je ze hoort en hoe sterk, hangt bovendien ook nog helemaal af van de bouw van het instrument. In Fig. 1 rechts onderaan zijn de sterkten te zien van de eerste 10 modi van de snaar als die wordt aangetokkeld zoals dat links in de figuur gebeurt. Het is dus echt een *mix*, een opeenstapeling, van de laagste 10 trillingsmodi. De hogere modi zijn weggelaten om te laten zien dat de golfbeweging die door de snaar loopt precies dezelfde als links, alleen wat minder hoekig.. De klank zal dan ook wat "ronder", doffer zijn; je hoort immers slechts de laagste 10 harmonischen.

Kader 2

Filteren is vermenigvuldigen

In vele afleveringen werd al gesproken over de *amplitudekarakteristiek* van een filter. Dat was een plaatje waarin je direkt kunt aflezen hoe sterk een bepaalde frequentie wordt doorgelaten ten opzichte van andere frequenties. Stel nu dat je de toon van een of ander muziekinstrument wilt filteren. Die toon heeft een bepaald spectrum en het filter heeft een bepaalde amplitudekarakteristiek. Nu is het vrij voor de hand liggend om je af te vragen of je met die twee gegevens kunt voorspellen hoe het spectrum van de gefilterde toon eruit ziet. Dat blijkt kinderspel. Het enige wat je (de computer) moet (laten) doen is alle spectraallijnen van de toon die je gaat filteren afzonderlijk vermenigvuldigen met de corresponderende waarden van de amplitudekarakteristiek, zoals te zien in Figuur 3. In A is het spectrum van een zaagtandachtige synthesizertoon afgebeeld, waarvan de boventonen geleidelijk zachter worden. In B zie je de amplitudekarakteristiek van een "toonbol"-filter (Afl. 6) dat een piek vertoont bij 3000 Hz; en in C vind je het spectrum van de gefilterde toon. Daarin zijn de harmonischen rond 3000 Hz veel sterker geworden. Je kunt zelf nagaan dat je van elke spectraallijn van de gefilterde toon kunt zeggen: C = A X B. Dit maakt duidelijk wat ze in DSP-jargon bedoelen met: "*filteren is vermenigvuldigen in het frequentie-domein*".

Er zijn filters, zoals het kamfilter (Afl. 5 Figuur 2) en het daaraan verwante Lopend Gemiddelde filter (Afl. 9 Figuur 3) waarvan de amplitudekarakteristiek bij bepaalde frequenties gelijk is aan nul, de zogenaamde "nul-dips". Bij die frequenties worden de corresponderende spectraallijnen van het inputsignaal met nul vermenigvuldigd, dus *volledig* tegengehouden. Omdat de nul-dips bij deze filters op perfect regelmatige afstand van elkaar liggen, kun je er een harmonische toon, waarvan de frequentiecomponenten eveneens op perfect regelmatige afstand van elkaar liggen, *volledig* mee onderdrukken. Dit gegeven speelt een hoofdrol in de Fourieranalyse.