Aflevering 11 DSP-serie
verschenen in Music Maker jan 2001

Fourieranalyse (3)

Spiraalgolven

Driedimensionale sinussen die zich als schroeven door de tijd heenboren. Die vormen de basis van de FFT en tevens het sluitstuk van het drieluik over de Fourieranalyse.

In de vorige aflevering hebben we een methode gevonden, waarmee we de harmonischen van een proeftoon voor de volle honderd procent van elkaar kunnen scheiden en als afzonderlijke tonen hoorbaar maken via de verschillende outputs van een filterbank. Daar zou Helmholtz erg jaloers op zijn geweest, want zijn doos toonbollen (Afl. 6) stelde hem hoogstens in staat om naar keuze een bepaalde boventoon wat te versterken ten opzichte van de andere; je hoorde dan altijd nog van alles meeklinken als je het tuitje van zo'n toonbol in je oor stopte en daarmee bijvoorbeeld naar een harmoniumtoon ging luisteren. Helmholtz kende de Fourieranalyse heel goed en maakte daarvan gebruik bij zijn akoestisch onderzoek, maar daarbij ging het altijd uitsluitend om de theoretische vorm ervan - op papier dus. De theoretische afleidingen overtuigden Helmholtz ervan dat boventonen echt door muziekinstrumenten worden opgewekt, maar hij heeft ze z'n hele leven lang nooit rechtstreeks als volledig gescheiden, afzonderlijke tonen gehoord.

En hoewel dat, zoals we zagen, met een PC kinderspel blijkt, zijn we toch nog niet tevreden. Waar het namelijk om draait is te achterhalen hoe sterk de verschillende boventonen van de proeftoon zijn, het amplitudespectrum dus. Daarmee beschikken we dan over het "recept" voor het reconstrueren van het timbre van de proeftoon en bovendien over een uitstekende basis voor allerlei manipulaties met dat timbre. Maar wat we tot nu toe bereikt hebben is heel wat anders. In Figuur 1 zijn de resultaten van de vorige aflevering nog eens afgebeeld. We hebben een filterbank die de verschillende boventonen perfect kan scheiden en in afzonderlijke kanalen weergeven. De outputsignalen bestaan uit sinustoontjes die rechts in verschillende kleuren zijn afgebeeld. Uit de figuur kun je onmiddellijk aflezen dat bijvoorbeeld de 300 Hz toon (rood) veel zachter is dan de 200 Hz toon (geel), want de maximale uitwijking ervan (de "toppen en dalen") is veel kleiner. Maar "aflezen" uit een grafiek, puur visueel, is natuurlijk niet voldoende. We zoeken naar een filterbank die zelf "weet" hoe groot de maximale uitwijking in elk kanaal is en daarmee dus automatisch de gegevens aanlevert voor het amplitudespectrum. Nu zou je denken dat dit probleem heel eenvoudig is op te lossen: in de figuur is te zien dat de sinussen die uit de filterbank komen na de transiënt (de "aanloop"-tijd van het filter, dat wil zeggen de tijd die verstrijkt voordat alle delays van het filter met inputsamples gevuld zijn) rustig en regelmatig voortgolven; het moet dan toch vrij simpel zijn om met de computer de toppen te vinden en te kijken hoe hoog die zijn? Dat is inderdaad een oplossing, maar wel een waar veel overbodig rekenwerk mee gemoeid is. Want zodra alle samples van één hele trillingsperiode van de proeftoon in de delays van het filter zijn binnengeschuifeld (en dat was in dit voorbeeld dus 0,01 seconde, dus 441 samples) is de transiënt ten einde en zit alle geluidsinformatie waarvan je het spectrum wilt kennen *in* het filtersysteem. Precies op dat moment moet het dus mogelijk zijn om het amplitudespectrum vast te stellen. Maar daartoe is de filterbank in z'n huidige vorm niet in staat.

Dan is er nog een tweede probleem. De boventonen die door muziekinstrumenten worden opgewekt lopen meestal niet mooi in de pas, maar verschillen in fase (Afl. 3 en 7). We willen daarom van elke harmonische ook de fasedraaiing kunnen vaststellen, het fasespectrum dus. Beschik je alleen over het amplitudespectrum, dan kun je wel het timbre van de proeftoon reconstrueren, maar niet de exacte golfvorm. Daarvoor moet je ook het fasespectrum hebben. Ook dit fasespectrum moet direct na afloop van de transiënt berekenbaar zijn en dat is, alweer, met de huidige filterbank niet mogelijk. Sterker nog, met deze bank kun je het fasespectrum nooit van z'n leven vaststellen, zelfs niet een eeuw na afloop van de transiënt!

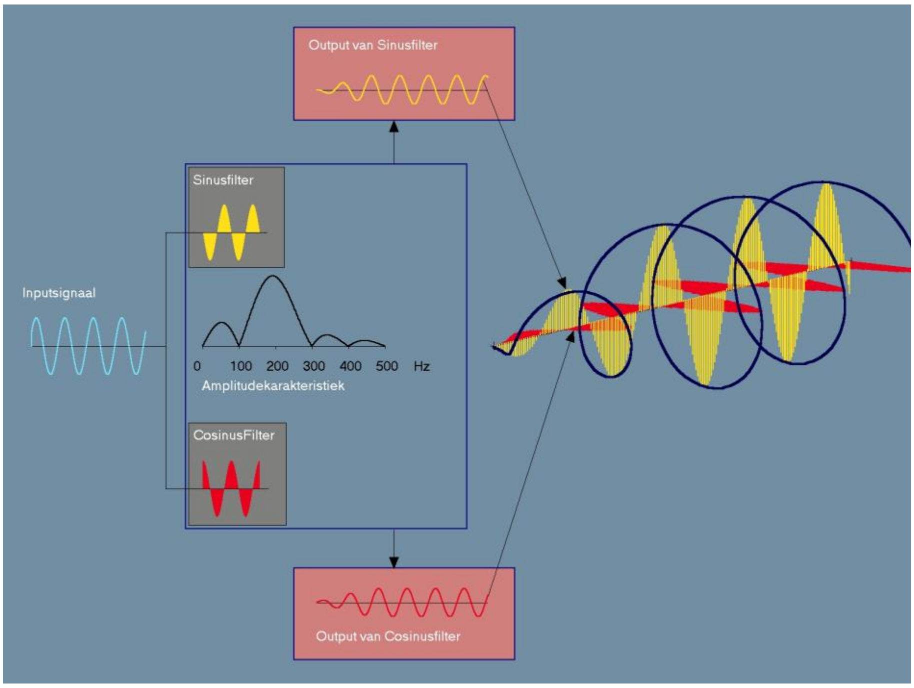
Kortom, hoe jaloers Helmholtz ook op ons filterbankje zou zijn, en hoeveel praktisch nut het ook heeft bij het gehoormatig uitpluizen van harmonische tonen, we kunnen er noch het amplitude-, noch het fasespectrum mee vaststellen. Toch zitten we, als we ook dat doel willen bereiken, met deze filterbank niet op een dwaalspoor. We hoeven er niks van af te breken of te verbouwen. Om de beide spectra te berekenen moet er alleen maar het een en ander bij!

Complexe Signalen

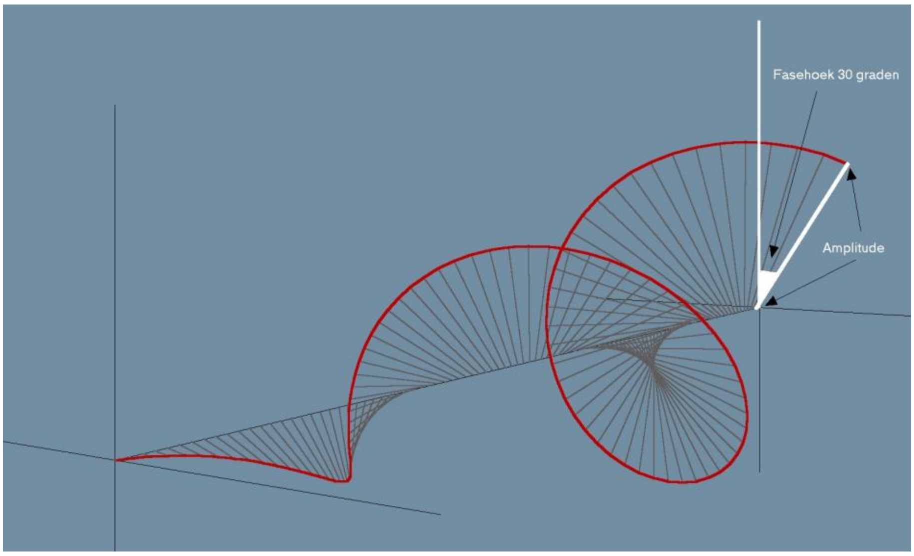
Een van de meest opvallende eigenschappen van de outputsignalen van de filterbank, zoals rechts in Figuur 1 te zien, is dat ze, na de transiënt, perfect sinusvormig zijn. Dat is altijd het geval zolang het inputsignaal harmonisch is en de periodetijd van de grondtoon precies overeenstemt met de transiënttijd van de filters in de bank. Hoe sterk of zwak de harmonischen ook zijn en hoe de fase ervan ook is gedraaid, de outputs blijven perfect sinusvormig. Maar wat is een sinus nu eigenlijk? Is het een hersenspinsel van een geflipte professor? Ongetwijfeld. Komen sinussen wel eens langs vliegen? Ook dat zou best eens kunnen! Want stel, je hebt een eenmotorig propellervliegtuigje en je bevestigt op het uiteinde van de propeller een lampje, je start de motor en gaat vliegen in het donker. Iemand die op een afstand het vliegtuig van links naar rechts voorbij ziet komen neemt een spoor van licht waar dat de vorm heeft van een perfecte sinusgolf. Het lampje op de propeller beweegt zich in een spiraalvorm, maar de waarnemer die daar van opzij tegenaan kijkt, op een afstand, ziet die spiraal platgedrukt tot een (tweedimensionale) sinusgolf, zoals we er in de figuren van deze serie al velen zijn tegengekomen. Die sinusgolf kun je dus beschouwen als de projectie ("schaduw") van iets ruimtelijks op iets plats.

Dat is een aanwijzing voor de oplossing van ons probleem. Laten we eens aannemen dat de output van elk bandfilter in de filterbank inderdaad het lichtspoor voorstelt van het lampje op de draaiende propeller van een vliegtuig. Dat draaien van de propeller kun je opvatten als het onophoudelijk veranderen van fase. En de lengte van de propeller kun je beschouwen als de amplitude. Dus bij de draaiende propeller zijn de grootheden waarover we graag meer willen weten, namelijk amplitude en fase, volledig onafhankelijk van elkaar. Want of de propeller draait of niet, de lengte ervan blijft altijd gelijk. Maar in de sinusvormige projectie van de spiraalbeweging worden de fase en de amplitude hopeloos door elkaar gemangeld en zijn niet meer afzonderlijk te onderscheiden. Het zou dus heel mooi zijn als we de sinusvormige output van die bandfilters op een of andere manier zouden kunnen "oppompen" tot een 3D propellerachtige spiraalvorm, zodat we daaruit de fase en amplitude van elkaar kunnen scheiden.

Hoe blaas je nu een sinus op tot een spiraal? Een spiraal is een ruimtelijk object. En elk ruimtelijk object kun je construeren door de combinatie van twee platte objecten, namelijk het bovenaanzicht en het zijaanzicht ervan.. Die twee aanzichten staan haaks op elkaar en vormen dus een hoek van 90 graden. Om nu aan die spiraalvormige signalen te komen wordt elk bandfilter in de filterbank *dubbel* uitgevoerd, waarvan beide delen elk één "aanzicht" genereren. Tot nu toe maakten we een bandfilter door de Gains van een Lopend Gemiddelde filter te vullen met één of meerdere hele periodes van een sinus (Afl. 9). Dat bandfilter kun je beschouwen als “sinusfilter”. Nu voegen we daar nog een tweede Lopend Gemiddelde filter aan toe, waarvan de Gains eveneens gevuld zijn met één of meerdere hele periodes van een sinus, met dit verschil dat de fase van die sinus precies 90 graden gedraaid is. Een sinus met een fasedraaiing van 90 graden heet een cosinus, dus dit toegevoegde filter noemen we maar even het “cosinusfilter”. Zo hebben we dus een dubbel bandfilter dat twee “aanzichten” geeft onder een hoek van 90 graden en daarmee is het gewenste driedimensionale, spiraalvormige signaal te construeren. Vervolgens kunnen we daaruit de amplitude en fase berekenen, (Zie Kader: *Waarheen Wijst de Wegwijzer?*).



De hele gang van zake is in Figuur 3 samengevat. Er is één dubbel bandfilter getekend; alle andere in de filterbank hebben natuurlijk dezelfde opbouw. Links is de proeftoon te zien waarvan we het amplitude- en fasespectrum willen vaststellen. Deze proeftoon is een 200 Hz sinustoon waarvan we de fase over een hoek van 30 graden hebben gedraaid. We hopen zowel de amplitude als de fase boven tafel te krijgen. Als alles goed is, dan moet de fasedraaiing die we vinden dus 30 graden zijn. De proeftoon wordt twee maal gefilterd: boven in de figuur door het sinusfilter (geel) en onderin door het cosinusfilter (rood). De twee outputsignalen lijken erg veel op elkaar, maar zijn toch niet helemaal hetzelfde. Je moet ze opvatten als twee foto's van dezelfde spiraal: één foto kijkt "van boven" en de ander "van opzij". Samen bevatten ze alle informatie die je nodig hebt om de ruimtelijke vorm van de spiraal te vinden. Die is rechts in de figuur te zien, samen met de beide "foto's" die nu onder een hoek van 90 graden over elkaar heen zijn geprojecteerd. De gele output van het sinusfilter is op de "muur" geschilderd, de rode output van het cosinusfilter op de "vloer". De twee outputs, geel en rood, horen zo onafscheidelijk bij elkaar dat ze samen een *complex signaal* worden genoemd. Dat woord complex wil niet aangeven dat het allemaal zo ingewikkeld is, maar dat er sprake is van een combinatie van twee "samengevouwen" signalen, die een hoek van 90 graden met elkaar maken. Het idee om elk bandfilter in de filterbank dubbel uit te voeren en dus steeds te filteren met zowel een sinus- als een cosinusfilter zodat je als output een complex signaal krijgt, is een van de hoekstenen van de signaaltheorie, filtertheorie en elektrotechniek. De hele audio-DSP staat er dan bol van; in allerlei muzieksoftware die iets leuks met geluid kan doen of spectra kan berekenen kom je complexe signalen tegen. Je hebt nu een idee waarom.



DFT en FFT

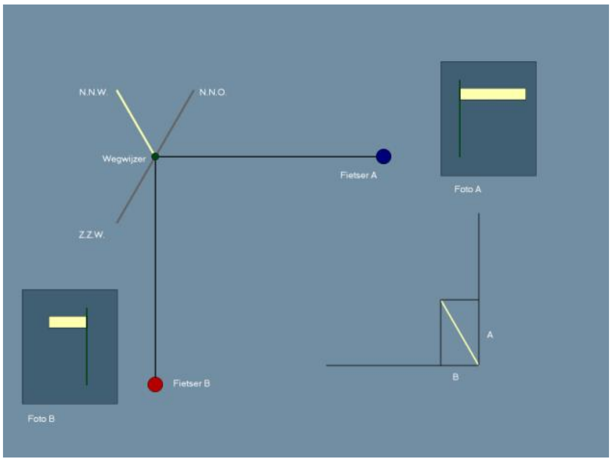
Nu terug naar ons uitgangspunt. We wilden niet alleen het ampitude- en het fasespectrum van de proeftoon weten, maar stelden bovendien dat zodra de transiënt ten einde is, alle benodigde geluidsinformatie *in* het filtersysteem aanwezig is om die twee spectra te berekenen. Dat zou betekenen dat de lengte van onze spiraal daarmee is vastgelegd. De twee Lopend Gemiddelde filters die we gebruiken om het complexe signaal op te wekken, bevatten alletwee, in dit voorbeeld, 441 Gains en 440 Delays. We zijn dus heel in het bijzonder geïnteresseerd in die 441ste complexe outputsample, die tevens de laatste sample in de spiraal vormt. Als alles goed is, heeft elke sample die daarna nog uit de filters komt voor ons doel niets meer te betekenen. In Figuur 4 is de transiënt in de vorm van afzonderlijke, complexe samples weergegeven. De laatste sample is de 441ste. Het blijkt dat de lengte ervan inderdaad de sterkte van 200 Hz boventoon aangeeft. Bovendien staat de sample schuin en de hoek met de verticale as blijkt 30 graden te zijn, wat exact overeenkomt met de fasedraaiing die we aan deze harmonische vooraf hadden gegeven. In alle andere dubbelbandfilters zien we overeenkomstige resultaten. Bingo! Wij mogen door naar de volgende ronde!!

Tijd voor een samenvatting. Je hebt een digitale opname van een harmonische toon, waarvan je de toonhoogte kent. Daarmee ligt vast hoeveel samples een hele trillingsperiode bevat. Daarmee ligt tevens vast uit hoeveel Gains en Delays de Lopend Gemiddelde-filters van de filterbank bestaan, de transiënttijd dus. Vervolgens trek je evenzoveel inputsamples door de filterbank en kijkt naar de laatste complexe outputsample in elk bandfilter. Daaruit kun je zowel de amplitude als de fase van de desbetreffende harmonische afleiden. Deze procedure heet de *Discrete Fourier Transformatie (DFT)*: die transformeert de informatie van een tijdsignaal tot spectrale informatie. De DFT omvat een kolossale hoeveelheid rekenwerk. Gelukkig bestaat er een truc waarmee je dat rekenwerk zeer drastisch kunt inkorten: de *Fast Fourier Transformation (FFT)*. Let wel: de FFT is niet iets anders dan de DFT; het is puur en snelle rekenmethode voor de DFT. Maar voor die snelheid moet je wel een prijs betalen, want bij de FFT is de keuze voor het aantal Gains beperkt tot machten van twee, dus 2, 4, 8, 16, 32 etcetera. De meest voorkomende waarde is 1024. Dan is de FFT ruim 100 maal zo snel als de DFT. Dat is natuurlijk prachtig, maar een filter zoals in het voorbeeld hierboven, met 441 Gains, kun je er niet mee realiseren. Toch wordt in 99% van de gevallen gebruik gemaakt van de FFT, juist vanwege die gigantische snelheid. Omdat de keuze van de Gain-aantallen bij de FFT zo beperkt zijn, krijg je allerlei afwijkingen, waar je wel even op bedacht moet zijn! Daarover meer in de volgende aflevering.

Kader:

Waarheen Wijst de Wegwijzer?

Je komt een bospaadje affietsen en ziet in de verte een wegwijzer. Van een afstand is niet altijd duidelijk zichtbaar in welke richting de wijzer nu precies wijst. Figuur 2 is een wandelkaart waarop een wegwijzer is aangegeven die naar het Noordnoordwesten (N.N.W.) wijst. Vanuit punt A kijkt iemand naar de wegwijzer, maar kan van die afstand niet zien of het bordje nu naar N.N.W. of naar N.N.O. wijst. Nu staat er in punt B ook een fietser naar de wegwijzer te kijken. En die persoon heeft moeite om vast te stellen of richting N.N.W. dan wel de richting Z.Z.W. wordt aangegeven. Nu maken ze alletwee een foto van de wegwijzer (zie Figuur 2). In de foto van A wijst de wijzer naar rechts, maar in die van B naar links. Ook wordt de wijzer in de twee foto's afgebeeld met twee verschillende lengten, *a* en *b*. Omdat de foto's ten opzichte van de wegwijzer onder een hoek van 90 graden gemaakt zijn, kun je ze beschouwen als vooraanzicht en zijaanzicht van de wegwijzer. En daarmee kun je door projectie zowel de werkelijke lengte van de wijzer als de richting terugvinden. (Uit de wiskundeles herinner je je dat je de lengte kunt vinden met behulp van de vertrouwde stelling van Pythagoras, en de richting door met een zakjapje de arctangens te bepalen van *a*/*b*.)



Dus als je beschikt over zowel een voor- als een zijaanzicht heb je voldoende gegevens om de lengte en richting van de wegwijzer bepalen. Vertaald naar DSP-jargon komen die lengte en richting overeen met amplitude en fase.