Harmonische boventonen

Dit is een fragment uit een eerdere versie van de NLT-module Sound Design.
Bestudeer het nadat je H2 van de huidige versie hebt doorgewerkt.

boventonen
Uit de vorige opdrachten kunnen we concluderen dat:

*Elke toon die **geen** sinustoon is, bestaat uit een mix*
van sinustonen met verschillende frequenties en amplitudes (en fases).

Tenminste, dat is de conclusie die je trekt uit wat je in het spectrum *ziet*! Maar wat je *hoort* is een toon met een zekere toonhoogte en een zekere klankkleur (helder, dof, hol, nasaal etc.). Dat roept de vraag op: als zo'n toon bestaat uit een mix van sinustonen, waarom hoor je dan niet een aantal *afzonderlijke* tonen?
Het merkwaardige is dat je *wel degelijk* een aantal verschillende tonen *kunt* horen: als je echt heel goed gaat luisteren naar een lang aangehouden toon en er op gaat letten, dan dringt het na een tijdje tot je door dat je inderdaad naast de grondtoon (de laagste toon) ook nog enkele andere, hogere, zachte tonen waarneemt die op een of andere raadselachtige manier "verborgen" zitten in die toon. Die hogere tonen noemen we **boventonen** of **natuurtonen**. Boventonen hebben altijd dezelfde golfvorm: het zijn pure sinustonen, precies zoals de spectraallijnen in het spectrum al aangeven.

De computer kan je op verschillende manieren te hulp komen om in een toon de afzonderlijke boventonen te onderscheiden.

(1) mixen
Als je weet hoe het spectrum van een toon eruit ziet (bijv. door te kijken naar het beeld in het Spectrumvenster), dan kun je de toon ook "nabouwen" door een aantal sinustonen van de juiste frequentie en amplitude, één voor één, bij elkaar te mixen, precies volgens het "recept" van het spectrum. Bij elke sinus die je toevoegt, begint de mix weer ietsje meer te lijken op de oorspronkelijke toon, zowel in golfvorm en spectrum als in klank. Dit gaan we doen in Opdracht 2.18.

(2) zwevingen
Je kunt bij een complexe toon (bijv. een zaagtand) ook een sinus met een zekere frequentie mixen zodat zwevingen ontstaan met één van de boventonen. Wat zweving ook al weer precies was, herhalen we in Opdracht 2.17. Hoe je een boventoon detecteert door middel van zweving zullen we zien in Opdracht 2.20.

(3) filteren
In hoofdstuk 5 gaan we met behulp van een resonantiefilter alle boventonen van een toon op één na, onhoorbaar maken. De toon die we overhouden blijkt inderdaad de klank, de golfvorm en het spectrum van een pure sinustoon te hebben!

harmonischen
Een van de redenen waarom je een complexe toon niet duidelijk waarneemt als een aantal afzonderlijke tonen, maar juist eerder als één toon met een bepaalde klankkleur, heeft te maken met het periodiek-zijn van de toon. Om dat te verklaren opperen we eerst de volgende stelling :

Als een toon periodiek is, dan zijn de frequenties
van de boventonen veelvouden van die van de grondtoon.
We noemen dan de boventonen **harmonischen**.

Anders gezegd: dat een toon periodiek is kun je zowel zien aan de tijdgolfvorm (scoop) als aan het spectrum:

1. de golfvorm is een perfecte herhaling van één periode (volgens definitie van periodiciteit, zie §2);
2. in het spectrum liggen de spectraallijnen op *gelijke* afstanden van elkaar.

De eerste harmonische heet de **grondtoon**; dat is toon die je spontaan hoort en nazingt en die je in het spectrum ziet als *de meest linkse spectraallijn*.

Voorbeeld
Een zaagtandtoon met een grondtoon van *300* Hz is periodiek en heeft *dus* harmonische boventonen met frequenties *300, 600, 900,...* Hz. Harmonische nummer *17* vind je in het spectrum als de *17*^{de} spectraallijn en heeft een frequentie van $17 \cdot 300 = 5100$ Hz.

Vanwaar die onverbiddelijke samenhang tussen periodiek-zijn en harmonisch-zijn? En waarom overheerst in periodieke, harmonische tonen zo duidelijk de grondtoon?
Om die vragen (en later nog vele andere!) te beantwoorden introduceren we nu het begrip *fasor*.

Fasor en sinus
In Fig. 2.11 zie je links een zg. *draai-schuif-mechaniek*. Je kunt daarmee een ronddraaiende beweging (bijv. de as van een electromotor) omzetten in een op- en neergaande beweging. Toepassing ervan vind je bijv. in een decoupeerzaag of een naaimachine.

De kruk (groen) draait net zo rond als de trapper van een fiets of de wijzers van een klok.
Zo'n rondraaiende pijl noemen we een **fasor**. Net zoals een cirkel, een kubus of een lineaire functie, moet je een fasor beschouwen als een wiskundig object. Het wordt met name zeer veel gebruikt bij de analyse van trillingen en trillingssystemen.
Het zwarte gedeelte van het mechaniek kan net als een zuiger *verticaal* op en neer schuiven tussen de twee geleiders (bruin). Het uiteinde van de fasor kan *horizontaal* in een sleuf heen en weer schuiven. Daarmee wordt een draaibeweging "omgezet" in *twee componenten:* een verticale en een horizontale. Rechts in de figuur zie je dat nog eens schematisch weergegeven. De relatie tussen de draaiing en de verticale beweging komt tot uitdrukking in driehoek AMB. Bij een constante hoeksnelheid α verandert de lengte van de verticale zijde AB *sinusvormig*, wat je kunt zien als je de hoogte van punt A projecteert op het ruitjespapier dat eveneens met constante snelheid beweegt.
Kort gezegd:

De ronddraaiende beweging van een fasor is te representeren als de combinatie van een verticale en

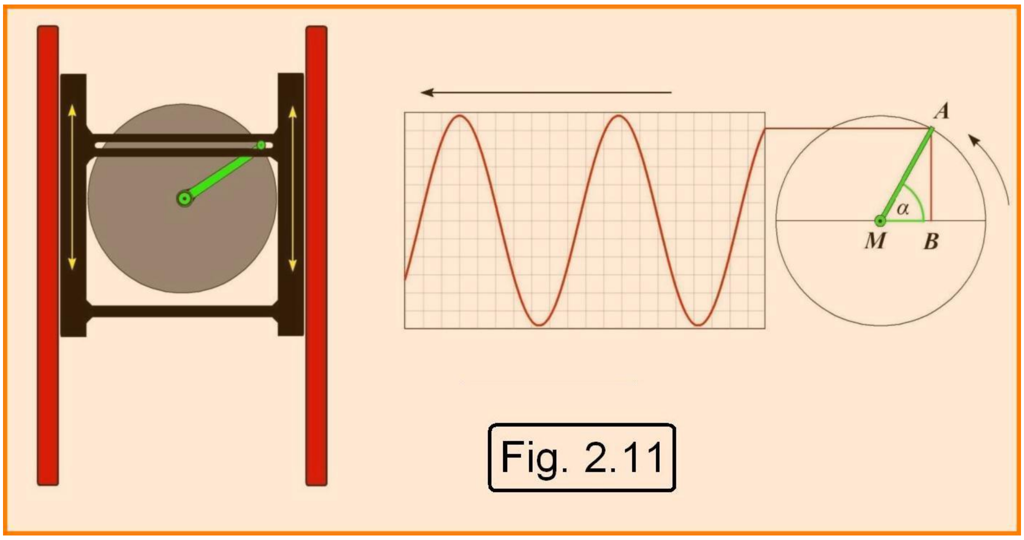
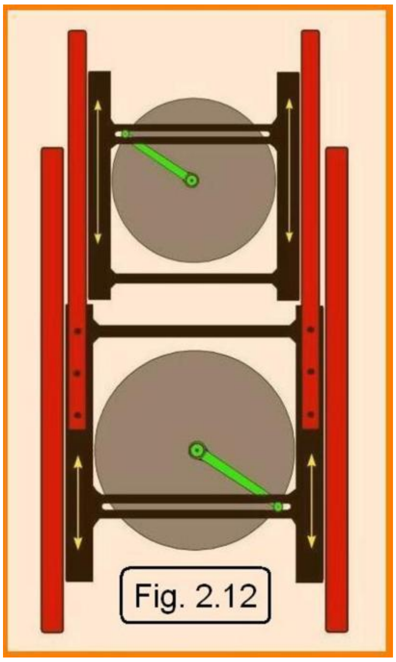


Fig. 2.11

een horizontale bewegingscomponent, resp. de sinus- en de cosinuscomponent.



De *lengte* van de fasor - in de figuur is dat de straal AM - noemen we de amplitude.

De positie van het eindpunt van een fasor wordt dus voor elk tijdstip volledig vastgelegd door de ***amplitude****, de* ***frequentie*** *(= het "toerental") en de beginstand van de fasor. Die beginstand noemen we de* ***fase****. Als de fase gelijk is aan 0, dan ligt de fasor horizontaal en wijst op tijdstip 0 naar rechts.*

We gaan nu de werking van het draai-schuif-mechaniek simuleren met de computer. Uiteraard zijn we vooral geïnteresseerd in zeer hoge toerentallen - frequenties die in het audio-gebied liggen. Om te voorkomen dat je dan de beweging van de fasor met je oog niet meer kunt volgen is de frequentie van de fasor in het visuele, *grafische* gedeelte van de animatie enorm vertraagd is. Alleen het *audio*-gedeelte van de animatie heeft de opgegeven frequentie. De animatie genereert 20 grafieken (beelden) per seconde; op het ruitjespapier representeert elke horizontaal beeldpunt (pixel) een stand van de fasor.

Commando-venster
Van nu af gaan we ook gebruik maken van het Commando-venster. Je zult snel merken dat dat veel sneller en prettiger werkt dan via de menu's. Meer details daarover in H3.

Opdracht 2.15 Fasor 1: animatie

a Ga naar menu Bestand → Open Preset en open Preset_Fasor_animatie.txt.
   Er verschijnt een tekst in het Commando-venster. Klik onder het Commando-venster op Start. De animatie begint onmiddellijk.

b Verander in de tekst in het Commando-venster de frequentie in 800 Hz. Dat doe je door de regel
```
Data F3[0] 200     ! Freq
```
   te veranderen in:
```
Data F3[0] 800     ! Freq
```
   Druk weer op Start. Bekijk de animatie. Experimenteer met de frequentie!

Interferentie en zweving
Met de Fasor-animatie kunnen we twee heel bekende trillingsverschijnselen, *interferentie* en *zweving* demonstreren. Daar kijken we nu eerst naar, voordat we toekomen aan de beantwoording van de bovengestelde vragen over periodiek-zijn en harmonisch-zijn.

Opdracht 2.16 Fasor 2: interferentie
We nemen nu *twee* draai-schuifmechanieken, en schroeven de (bruine) geleiders van de ene op het bewegende (zwarte) gedeelte van de ander, zoals in Fig. 2.12. Stel je daarbij voor dat we de fasor elk afzonderlijk kunnen instellen, zowel in amplitude, fase als frequentie.
Ga naar menu Bestand → Open Preset en open Preset_Fasor_animatie.txt.
Je moet WaveWizard eerst vertellen dat er nu *twee* fasors getekend moeten worden. Dat doe je door in te vullen:
```
Aantal fasors     2
```

Voer de onderstaande vier fasor-animaties uit.

(1)
```
Data F1[0] 5000 5000    ! Amp
```

```
Data F2[0] 0 0          ! Fase  (in graden)
Data F3[0] 100 100      ! Freq  (in Hz)
```

(2)
```
Data F1[0] 5000 5000    ! Amp
Data F2[0] 0 90         ! Fase
Data F3[0] 100 100      ! Freq
```

(3)
```
Data F1[0] 5000 5000    ! Amp
Data F2[0] 0 170        ! Fase
Data F3[0] 100 100      ! Freq
```

(4)
```
Data F1[0] 5000 2500    ! Amp
Data F2[0] 0 180        ! Fase
Data F3[0] 100 100      ! Freq
```

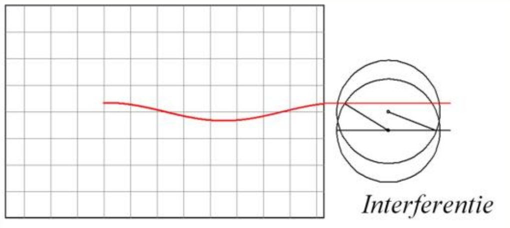


Fig. 2.13

Formuleer voor welke waarden van **Amp**, **Fase** en **Freq**:
a de resulterende toon een amplitude heeft die gelijk is aan de som van de amplitudes van de fasors.
b de resulterende toon een amplitude heeft die gelijk is aan nul.

Antwoord
a voor elke waarde van **Amp1** en **Amp2**; **Fase1** = **Fase2**; **Freq1** = **Freq2**.
b **Amp1** = **Amp2**; **Fase1** – **Fase2** = 180° ; en **Freq1** = **Freq2**.

Interferentie (Fig. 2.13)
*Als je twee sinustonen van **gelijke** frequentie mixt, dan krijg je een sinustoon die ook weer diezelfde frequentie heeft. De amplitude van de mix hangt af van de amplitudes en het faseverschil tussen de beide fasors.*
Dit verschijnsel heet ***interferentie*** *(Eng: interference = verstoring, beïnvloeding)*. Bij gelijke fasor-amplitudes en een faseverschil van 180 graden wordt de amplitude van de mix gelijk aan nul. We spreken dan van **uitdoving**. Het illustreert het bekende gezegde dat soms: *"geluid + geluid = stilte"*.

Interferentie speelt een essentiële rol bij de analyse van reflecties en echo-effecten. En dus ook bij filters; in hoofdstuk 1 vermeldden we al dat filterwerking altijd ontstaat door een bepaald reflectie-patroon. Als je weet wat interferentie is, snap je ook de werking van een filter. Meer in Hoofdstuk 3.

Opdracht 2.17 Fasor 3: zweving
Voer de drie onderstaande fasor-animaties uit.

(1)
```
Data F1[0] 5000 5000    ! Amp
Data F2[0] 0 0          ! Fase
Data F3[0] 400 440      ! Freq
```

(2)
```
Data F1[0] 5000 5000    ! Amp
Data F2[0] 0 0          ! Fase
Data F3[0] 400 405      ! Freq
```

(3)
```
Data F1[0] 5000 5000    ! Amp
Data F2[0] 0 0          ! Fase
Data F3[0] 400 400,5    ! Freq
```

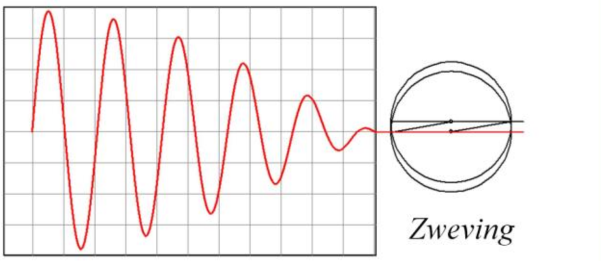


Fig. 2.14

a Op welke frequentie moet je de tweede fasor zetten als je de toon van de eerste fasor precies twee keer per seconde harder en zachter wilt horen worden?

b En precies *drie* keer per seconde?

Antwoord

a 402 Hz of 398 Hz.

b 403 Hz of 397 Hz.

> **zweving (Fig. 2.14)**
> De mix van twee sinustonen met frequenties die niet veel van elkaar verschillen, klinkt als een toon die afwisselend harder en zachter wordt. Dat komt omdat de tonen elkaar afwisselend versterken en uitdoven. Zo'n periode van harder en weer zachter worden noemen we een **zweving**. Het aantal zwevingen per seconde is gelijk aan het frequentieverschil van de beide tonen.
> Voorbeeld: de mix van twee sinustonen, met frequenties van 100 Hz en 104 Hz, levert een toon met vier zwevingen per seconde.

Opdracht 2.18 Fasor 4: periodiciteit en harmoniciteit

Als een trilling periodiek is met periode T, dan is hij *ook* periodiek met periode $2T$ of met periode $7T$ of met periode nT (n is een willekeurig *geheel* getal). Bijvoorbeeld: $sin(\alpha) = sin(\alpha + 2\pi) = sin(\alpha + 2n\pi)$. Met dat in gedachte maken we de volgende fasor-animatie.

Twee fasors, F_5 en F_6, hebben de volgende gegevens. Voer ze in en bekijk / beluister de animatie.

```
Data F1[0] 5000 5000    ! Amp
Data F2[0] 0    0       ! Fase
Data F3[0] 500  600     ! Freq
```

a Noem de frequenties van de fasors resp. f_5 en f_6 en bereken de periodes T_5 en T_6.

b Hoe lang doet F_5 erover om precies *vijf* rondjes te draaien? Noem die tijdsduur T.

c Hoeveel rondjes draait F_6 in diezelfde tijdsduur T?

d Op tijdstip T hebben beide fasors een *geheel* aantal rondjes gedraaid en staan dus alletwee weer precies in de beginstand. Op welk eerst volgende tijdstip staan ze wederom precies in de beginstand?

e Op welk tijdstip staan ze voor de N^{de} keer in de beginstand?

f Dat beide fasors op tijdstip T weer exact in dezelfde stand staan betekent dat alles weer precies zo is als op tijdstip 0 en dat vanaf tijdstip T weer precies hetzelfde golfpatroon zal worden getekend in het ruitjesvenster. Kortom: de trilling in het ruitjesvenster is *periodiek met periode T*. De frequentie f die met T correspondeert is de grondtoon van die trilling. De frequenties van de fasors F_5 en F_6 zijn daar veelvouden van. *Dus* de trilling is harmonisch!
Hoe groot is f?

g Vul in: $f_5 = \ldots f$; $f_6 = \ldots f$

h Als je goed luistert, dan lijkt het inderdaad wel alsof je *in* die twee tonen nog een derde hoort die veel lager is!! De frequenties daarvan is f. Deze niet aanwezige, maar toch hoorbare "spooktoon" is de grondtoon. Wat je hoort is dat de *mix* van f_5 en f_6 de periode T heeft. Deze toon wordt duidelijker hoorbaar naarmate je meer en meer fasors toevoegt, uiteraard met frequenties die veelvouden zijn van f. Bijvoorbeeld zes fasors:

```
Data F1[0] 3000 3000 3000 3000 3000 3000  ! Amp
Data F2[0] 0    0    0    0    0    0     ! Fase
Data F3[0] 300  400  500  600  700  800   ! Freq
```

Let erop dat je nu `6` invult achter `Aantal fasors`.
Experimenteer eens met het aantal fasors en luister naar de toon. Maak op spoor S2 eens een sinustoon van f Hz en zet S1 op de linker box en S2 op de rechter.

Antwoord

a $f_5 = 500$ Hz $\rightarrow T_5 = 0{,}002$ sec,
$f_6 = 600$ Hz $\rightarrow T_6 = 0{,}001667$ sec.

b $T = 5T_5 = 0{,}01$ sec

c $xT_6 = T \rightarrow x = 6.$

d Op tijdstip $2T$.

e Op tijdstip *NT*.
f $f = 100$ Hz.
g $f_5 = 5f$; $f_6 = 6f$.

Conclusie
We zeiden aan het begin van deze paragraaf dat de boventonen op een of andere manier "verborgen" zitten in de complexe toon die je hoort. Nu weten we dat dit ook betekent dat de grondtoon "verborgen" zit in de harmonischen en daardoor ook hoorbaar kan zijn zonder dat de grondtoon zelf in het spectrum aanwezig is.
Elke willekeurige mix van harmonischen, *ook als de grondtoon zelf daarin ontbreekt*, heeft de periode van de grondtoon en zal dan ook een toon te horen geven waarin die grondtoon duidelijker waarneembaar wordt naarmate het aantal harmonischen toeneemt. Alle harmonischen lopen met elkaar "in de pas": ze draaien weliswaar allemaal rondjes met hun eigen "baansnelheid", maar op gezette tijdstippen *T*, *2T*, *3T*, ... zijn ze allemaal weer op de plek waar ze hun baantjes begonnen. Zo dragen ze gezamenlijk bij aan een trillingspatroon met periode *T*.
Muzikaal uitgedrukt: de harmonischen ***stemmen*** met elkaar; als je een melodie speelt op een instrument dat harmonische tonen produceert, dan klinkt de melodie veel beter "verstaanbaar" dan wanneer je speelt op een niet-harmonisch instrument, zoals bijv. een carillon. In principe kun je stellen dat het harmonisch-zijn van muziekinstrumenten een *voorwaarde* is voor alle ***tonale*** muziek: dat is muziek waarin melodie en meerstemmigheid de essentie vormen, zoals onze Westerse muziek. Een voorbeeld van een toon met niet harmonische boventonen ga je maken in Opdracht 2.21 en hoe muziek klinkt met tonen waarvan de boventonen niet-harmonisch zul je horen in Opdracht 4.6 (Stemvork-klavier).
We hebben hiermee de samenhang tussen periodiek-zijn en harmonisch-zijn laten zien en verklaard waarom in een periodieke, harmonische toon de grondtoon overheerst, zelfs als die grondtoon zelf afwezig is.

Opdracht 2.19 Fasor 5: zaagtand
Bewezen kan worden dat bij een zaagtandgolf de amplitudes van de harmonischen omgekeerd evenredig zijn met het rangnummer van de harmonischen. Dus als de grondtoon een amplitude *A* heeft, dan heeft harmonische *h* een amplitude *A / h*.
a Maak met de fasor-animatie een zaagtandgolf die uit tien harmonischen bestaat en waarvan de grondtoon een frequentie heeft van *400* Hz en een amplitude *1000*.
b De Fasor-animatie heeft de toon op spoor S1 gezet. Maak nu op S2 met behulp van de Toongenerator een zaagtandtoon van dezelfde frequentie en met amplitude 1700. Vul 10 in achter `Aantal harmonischen`. Wat hoor en zie je?

Antwoord
a
```
Data F1[0] 1000 500 333  250  200  167  143  125  111  100  ! Amp
Data F2[0] 0    0   0    0    0    0    0    0    0    0    ! Fase
Data F3[0] 400  800 1200 1600 2000 2400 2800 3200 3600 4000 ! Freq
Fasor-Animatie
  Aantal fasors                         10
  Output ('S1', 'S2' of 'S3')           S1
  aantal beelden per seconde (max 20)   20
  Aantal beelden                        20
  Wissen na elke ... beelden            1

Toongenerator
  Frequentie (Hz of TOETS)    400 Hz
  Amplitude                   1700
  Golfvorm                    zaag
  Spoor: S?[?]                S2[0]
  Duur                        5 sec
  Aantal harmonischen         10
```

b S1 = S2.

Opdracht 2.20 Fasor 6: boventoondetectie m.b.v. zweving

a Voeg aan de fasors van de zaagtand nog een elfde fasor toe, waarvan je de frequentie zo kiest dat er één zweving per seconde ontstaat met de vijfde harmonische. Geef die elfde fasor ook dezelfde amplitude als de vijfde harmonische.

b Beluister en bekijk de toon in het Scoop / Spectrumvenster. Wat hoor je? Hoe wordt de zweving in het spectrum zichtbaar?

Antwoord

a
```
Data F1[0] 1000 500 333  250  200  200  167  143  125  111  100  ! Amp
Data F2[0] 0    0   0    0    0    0    0    0    0    0    0    ! Fase
Data F3[0] 400  800 1200 1600 2000 2001 2400 2800 3200 3600 4000 ! Freq

Fasor-Animatie
Aantal fasors                        11
Output ('S1', 'S2' of 'S3')          S1
aantal beelden per seconde (max 20)  20
Aantal beelden                       2000
Wissen na elke ... beelden           1
```

b Je hoort de 2000 Hz toon 1 keer per seconde zachter en harder worden.
De vijfde spectraallijn krimpt elke seconde eventjes tot nul en neemt dan weer toe tot de oorspronkelijke lengte.

Opdracht 2.21 Fasor 7: Harmonie der sferen...

Maak met de Fasor-animatie een sonificatie van het zonnestelsel waarin de baan van elke planeet wordt voorgesteld door een fasor. Maak gebruik van de gegevens in de tabel hieronder. *T* stelt de omlooptijd van een planeet voor. Reken *T* om naar *f*. Vermenigvuldig de frequentie van Mercurius met een constante *c* zodanig dat je een toon hoort van 5000 Hz. Schaal ook de andere frequenties op met *c*.
De afstanden van de planeten tot de zon sonificeer je door ze uit te drukken in de amplitude. De afstanden zijn in de tabel aangegeven in Astronomische Eenheden (1 A.E. = afstand zon-aarde). Ook die moet je voor de fasor-animatie opschalen, en wel met een factor 1000.

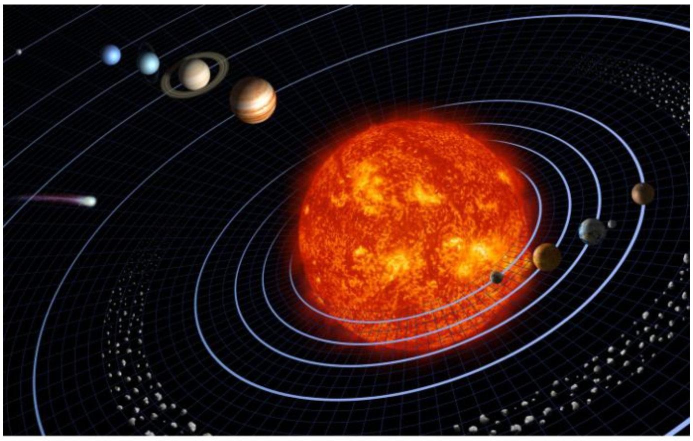


Fig. 2.15

Is deze "toon van het zonnestelsel" harmonisch?

planeet	**Amplitude** (in A.E.)	***T*** (in jaren)	***f*** (in 1/jaar)	***f'= cf*** (in Hz)
Mercurius	0,39	0,24085	?	5000
Venus	0,72	0,61521	?	?
Aarde	1,00	1,00004	?	?
Mars	1,52	1,88089	?	?
Jupiter	5,20	11,86223	?	?
Saturnus	9,54	29,4577	?	?

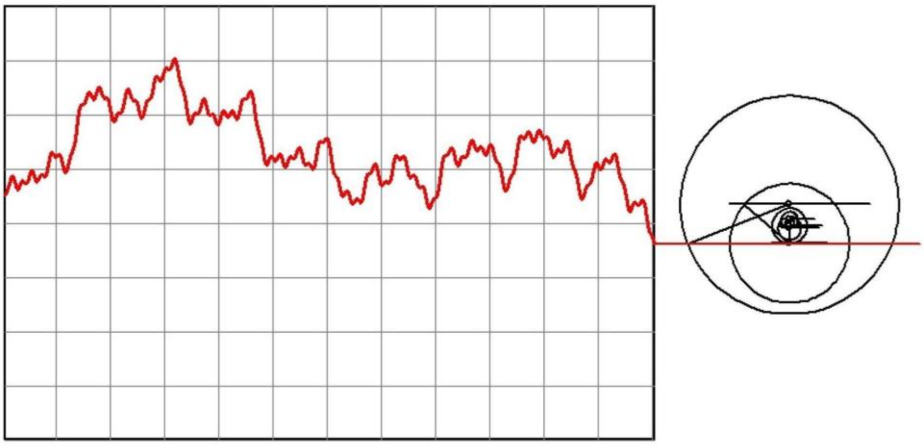
Antwoord

De frequenties zijn geen veelvouden van de grondtoon (baan van Saturnus), dus niet harmonisch.
$f' = cf \rightarrow c = f'/f \rightarrow c = 5000 / 4{,}1519618 = \mathbf{1204{,}25}$.

planeet	**Amplitude** (in A.E.)	***T*** (in jaren)	***f*** (in 1/jaar)	***f'= cf*** (in Hz)
Mercurius	0,39	0,24085	4,1519618	5000
Venus	0,72	0,61521	1,6254612	1957,4617
Aarde	1,00	1,00004	0,99996	1204,2018
Mars	1,52	1,88089	0,5316632	640,25541
Jupiter	5,20	11,86223	0,0843011	101,5196
Saturnus	9,54	29,4577	0,0339469	40,880554

```
Data F1[0] 390 720 1000 1520 5200 9540                          ! Amp
Data F2[0] 0 0 0 0 0 0 0                                        ! Fase
Data F3[0] 5000 1957,4617 1204,2018 640,25541 101,5196 40,880554 ! Freq

Fasor-Animatie
  Aantal fasors                        6
  Output ('S1', 'S2' of 'S3')          S1
  aantal beelden per seconde (max 20)  20
  Aantal beelden                       10000
  Wissen na elke ... beelden           1
```



Sonificatie van het zonnestelsel

Fig. 2.16

Samenvatting

- Geluid kun je op twee manieren grafisch voorstellen, nl door het *u(t)-diagram* en door het *spectrum,* dat trillingen afbeeldt als een mix van sinustonen.
- Beide grafische voorstellingen kun je met de computer weergeven als bewegende beelden (scoop- en spectrumvenster) zodat beeld en geluid, horen en zien, veel beter aan elkaar gekoppeld worden en meer inzicht geven in trillingseigenschappen.
- Elke geluidstrilling waarvan de golfvorm *niet* sinusvormig is, is opgebouwd uit een mix van sinustonen met verschillende frequenties en amplitudes (en beginfases). Deze sinustonen noemen we boventonen.
- Met behulp van fasor-animaties hebben we onderzocht wat *interferentie* en *zweving* is, en gezien dat een periodieke trilling *harmonisch* is, d.w.z. boventonen heeft waarvan de frequenties veelvouden zijn van die van de grondtoon. De boventonen van een periodieke trilling noemen we *harmonischen*. Ze liggen in het spectrum op gelijke afstanden van elkaar.
- Omdat elke mix van harmonischen dezelfde periode heeft als de grondtoon, produceren de harmonischen gezamelijk een toon waarin de grondtoon hoorbaar is, *óók wanneer die grondtoon zelf ontbreekt*. Daardoor helpen de harmonischen je oren zich te "focussen" op de grondtoon en dat is zo ongeveer een voorwaarde voor *tonale* muziek (= muziek "met melodieëen en akkoorden").
- De relatie tussen omlooptijden van de planeten, al sinds de Oudheid geroemd als de *Harmonie der sferen*, is *allesbehalve* harmonisch...