Een echo-effect is een kamfilter

(vervolg van Extra Opdracht *"50 Hz-brom verwijderen"*)

t.b.v. ***NLT-module Sound Design H5***
voorkennis: *Sound Design* H2 t/m H5.4,
extra opdracht *50 Hz-brom verwijderen*
context van: som-verschilformule; $P\sin\alpha + Q\cos\alpha = A\sin(\alpha+\varphi)$

In H4.3 pag 77 maakte je kennis met eenmalige echo (feedforward) in formule (7) die we hier nog eens herhalen:

$$S2[n] = S1[n] + a\cdot S1[n-N] \tag{4}$$

Dat dit echo-effect een nogal merkwaardige filterwerking moet hebben ben je misschien al gaan vermoeden door Opdrachten Brom 1 en Brom 4. Als je weet dat een periodieke toon een mix is van harmonischen (d.w.z. alle veelvouden van $f = F_S/N$, zie pag 45), en als je weet dat een echo-effect een periodieke toon *volledig* kan weghalen, dan weet je ook dat dat echo-effect alle harmonischen weghaalt. Een echo-effect moet dus een amplitudekarakteristiek hebben met *nulpunten* op regelmatige afstanden van elkaar, want de harmonischen liggen in het spectrum op regelmatige afstanden van elkaar! Hoe ziet die karakteristiek er dan precies uit? Om dat te onderzoeken gaan we te werk zoals in H5.4 (pag 98): we gebruiken een sinusgolf als input voor het echo-effect, dus $x[n] = \sin\omega n$.
De vergelijking van het echo-effect luidt dan:

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] + ax[n-N] \\ &= \sin\omega n + a\sin(\omega n - \omega N) \end{aligned} \tag{5}$$

Met de verschilformule $\sin(\omega n - \omega N) = \sin\omega n\cos\omega N - \cos\omega n\sin\omega N$ krijgen we:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sin\omega n + a(\sin\omega n\cos\omega N - \cos\omega n\sin\omega N) \\ &= (1 + a\cos\omega N)\sin\omega n - a\sin\omega N\cos\omega n \end{aligned}$$

Die laatste vorm noteren we even wat korter:

$$y[n] = P\sin\omega n + Q\cos\omega n \tag{6}$$

met $P = 1 + a\cos\omega N$ en $Q = -a\sin\omega N$.

Je ziet dat in P en Q de tijdvariabele n niet voorkomt. Het zijn de twee *constanten* die de amplitudes voorstellen van resp. een sinustoon $\sin\omega n$ en cosinustoon $\cos\omega n$. Die tonen hebben dezelfde frequentie ω en je kunt je dus afvragen: als die twee samenklinken, neem je ze dan waar als twee *afzonderlijke* tonen of als *één* toon?
Daarbij kun je bedenken dat (6) slechts een andere schrijfwijze van (5) is, nl. het echo-effect dat we toevoegen aan $x[n] = \sin\omega n$. Dus je kunt de vraag ook anders

formuleren: klinkt de mix van de directe sinustoon en van de reflectie als één enkele sinustoon of als twee afzonderlijke tonen?
Dat is echt iets dat je met WaveWizard snel kunt uitproberen. Je zult vaststellen dat je maar *één enkele* sinustoon hoort en dat de golfvorm er ook uitziet als een pure sinus. Natuurlijk ligt het definitieve antwoord altijd in het wiskundige bewijs en dat is in dit geval ook prima te doen: Opdracht Kam 4 helpt je om na te gaan dat:

$$P \sin \alpha + Q \cos \alpha = A \sin(\alpha + \varphi) \tag{7}$$

Hierin is $A = \sqrt{P^2 + Q^2}$ en $\varphi = \tan^{-1}(P/Q)$.

Passen we (7) toe op (6), dan komt er:

$$\begin{aligned} y[n] &= P \sin \omega n + Q \cos \omega n = \\ &= \sqrt{P^2 + Q^2} \sin(\omega n + \varphi) \end{aligned} \tag{8}$$

Formule (8) vertelt ons dat de mix van een sinustoon en een cosinustoon met dezelfde frequentie ω maar met verschillende amplitudes P en Q bestaat uit één enkele sinustoon met weer diezelfde frequentie ω, met amplitude $\sqrt{P^2 + Q^2}$ en met faseverschuiving $\varphi = \tan^{-1}(P/Q)$. We zijn hier vooral geïnteresseerd in de amplitude. De vorm onder het wortelteken vereenvoudigen we:

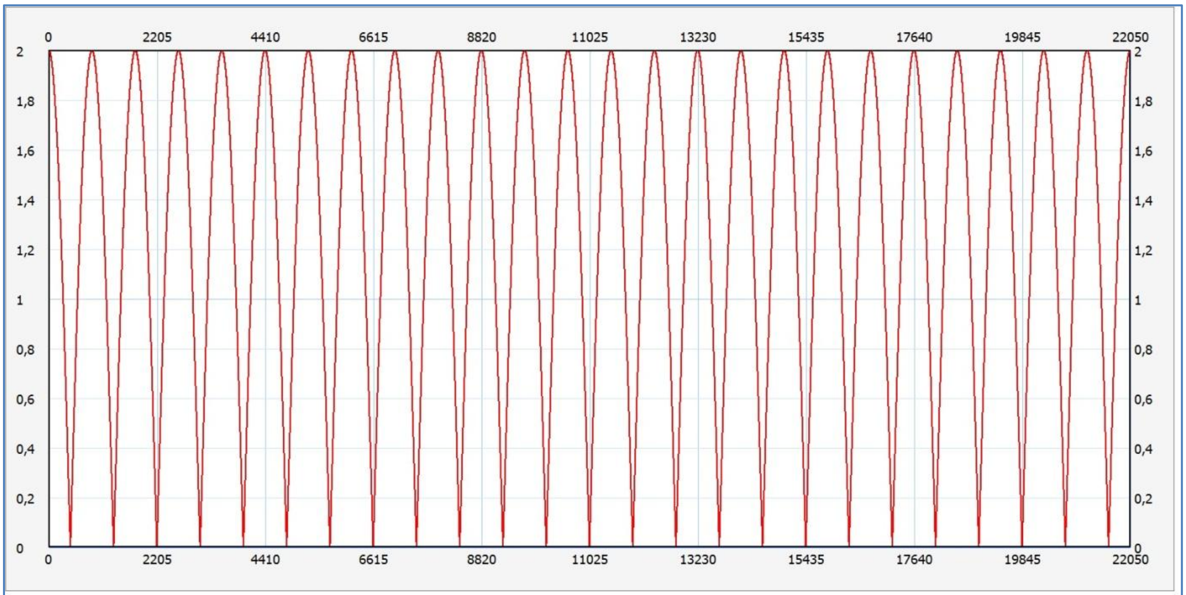
$$\begin{aligned} P^2 + Q^2 &= (1 + a \cos \omega N)^2 + (-a \sin \omega N)^2 \\ &= 1 + 2a \cos \omega N + a^2(\cos(\omega N)^2 + \sin(\omega N)^2) \\ &= 1 + 2a \cos \omega N + a^2 \end{aligned} \tag{9}$$

Net zoals op pag 99 zien we dat ook hier de amplitude een functie van de frequentie ω is. Er is sprake van een *frequentie-afhankelijke versterking*, dus van een *filter*. De formule voor de amplitudekarakteristiek $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2}$ vinden we met (9):

Amplitudekarakteristiek $A(\omega)$ van echo-effect $y[n] = x[n] + ax[n - N]$:

$$A(\omega) = \sqrt{1 + 2a \cos \omega N + a^2} \tag{10}$$

Voorbeeld 1 Preset Amplitudekarakteristiek Kamfilter
In *Preset Amplitudekarakteristiek Kamfilter.txt* vind je code waarmee je snel de amplitudekarakteristiek $A(\omega)$ kunt tekenen. De waarden van N en a kun je instellen. Voor $N = 50$ en $a = 1$ krijg je onderstaande grafiek. Let op de nulpunten! Als je naar de vorm van de grafiek kijkt, snap je wel waarom ze een echo-effect vaak aanduiden als een **kamfilter** (Eng: *comb filter*): het plaatje ziet eruit als een kam en hoe groter de waarde van N des te meer "tanden" de kam krijgt en des te dichter die op elkaar komen te liggen. Het aantal tanden tot aan de Nyquistfrequentie ($= F_s/2$, zie pag 53) is $N/2$; zie ook Opdracht Kam… Naarmate je $|a|$ meer laat verschillen van 1, worden de tanden steeds stomper.



Amplitudekarakteristiek Kamfilter N = 50
a = 1

Voorbeeld 2 Echo optellen
In formule (3) hebben we gezien dat het mogelijk is om een toon uit een signaal te verwijderen door een echo met een precies gekozen reflectietijd N van dat signaal *af te trekken*. De vraag is nu: is het ook mogelijk om een toon te verwijderen door een echo bij die toon *op te tellen*?
Dat het antwoord "ja" luidt, heb je in Opdracht Brom 4b al kunnen horen en zien. We gaan dat nu ook wiskundig bewijzen aan de hand van de amplitudekarakteristiek van het echo-effect, die gegeven is in formule (10). Verder bleek in Brom 4b dat de frequentie van output-toon een octaaf *hoger* was dan die van de input! We zullen zien dat formule (11) die octaafsprong eveneens tot uitdrukking brengt.

De bewerking "echo optellen" heeft als differentievergelijking $y[n] = x[n] + x[n-N]$, dus in dit geval geldt dat $a = 1$. Hier beschouwen we N als een gegeven getal en gaan op zoek naar een formule voor de frequentiereeks die weggefilterd zal worden. Die reeks zullen aanduiden met f_k. De amplitudekarakteristiek (10) met $a = 1$ luidt:

$$A(\omega) = \sqrt{2 + 2\cos\omega N}$$

De vraag die we nu moeten beantwoorden luidt: bestaan er waarden van ω zodanig dat $A(\omega)$ gelijk is aan nul? Zo ja, welke?
Daaruit rolt de volgende vergelijking:

$$\sqrt{2 + 2\cos\omega N} = 0 \;\rightarrow$$
$$2 + 2\cos\omega N = 0 \rightarrow$$
$$\cos\omega N = -1$$

We vinden oneindig veel waarden waarvoor $\cos\omega N$ gelijk is aan -1, nl.:

$$\omega N = \pi,\ 3\pi,\ 5\pi, \dots\ (2k-1)\pi \quad \text{voor } k = 1,\ 2,\ 3, \dots$$

Hier is $\omega = 2\pi f_k T_s$ (pag 97):

$$2\pi f_k T_s N = \pi,\ 3\pi,\ 5\pi, \dots\ (2k-1)\pi$$

Herinner je dat $F_s = 1/T_s$, en dat $0 \leq \omega \leq \pi$ (Opdracht 54), dus als we bovenstaande vergelijking delen door π, vinden we voor de frequentiereeks f_k:

$$f_k = \frac{F_s}{2N}(2k-1) \text{ voor } k = 1,\ 2,\ 3, \dots, (N+1)/2 \qquad (11)$$

Formule (11) geeft dus de frequenties waarvoor de amplitudekarakteristiek van $A(\omega) = \sqrt{2 + 2\cos\omega N}$ gelijk is aan 0. Dat zijn dus de nulpunten. Elke sinustoon met frequentie f_k wordt volledig onderdrukt. Merk op dat deze reeks bestaat *on*even harmonischen! (zie Opdracht Brom 9.)

Opdracht Kam 1
Hoe klinkt de mix van $\boldsymbol{P\sin\omega n + Q\cos\omega n}$?

Opdracht Kam 2 ruis met echo
Maak zoals in Opdracht 48 een ruisfragment van 40 sec aan, zet die op spoor S1. Voeg een echo-effect toe aan de ruis volgens formule (7) met waarbij $N = 20$ en $a = -1$.

(a) Hoeveel tanden telt de kam?
(b) Wat verandert er in het spectrum als je de code verandert in $a = +1$?
(b) Wat verandert er in het spectrum als je de code verandert in $N = 10$?

Opdracht Kam 3
Echo-effect doorfluiten!!
Zie *Sound Design* Opdracht 15 (pag. 43), Opdracht 23 (pag. 48), Opdracht 46 (pag 92).

Opdracht Kam 4 Bewijs dat $\boldsymbol{P\sin\alpha + Q\cos\alpha = \sqrt{P^2+Q^2}\sin(\alpha + \tan^{-1}(P/Q))}$
Ga uit van de vorm:

$$P\sin\alpha + Q\cos\alpha = c\sin(\alpha + \varphi). \qquad \text{(I)}$$

Volgens de somformule is $\sin(\alpha+\varphi) = \sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi$.
Substitueer dat in (I) en laat zien dat $P = c\sin\varphi$ en dat $Q = c\cos\varphi$.
Toon vervolgens dat $P^2 + Q^2 = c^2$ en dat $\tan\varphi = P/Q$.